РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ 2014 г.
I КУРС

Задача 1 (4 балла)

Определите, является ли функция $\ln\left(tg\,x+\sqrt{1+tg^2x}\right)$ чётной, нечётной или ни той, ни другой.

Решение

Выполним преобразования:

$$f(x)=\ln\left(tg\,x+\sqrt{1+tg^2x}\right)=\ln\left(\frac{(tg\,x+\sqrt{1+tg^2x})(tg\,x-\sqrt{1+tg^2x})}{tg\,x-\sqrt{1+tg^2x}}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{tg^2\,x-1-tg^2x}{tg\,x-\sqrt{1+tg^2x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}-tg\,x}\right)=-\ln\left(\sqrt{1+tg^2x}-tg\,x\right).$$

Найдём $f(-x)$: $f(-x)=-\ln\left(\sqrt{1+tg^2(-x)}-tg\,(-x)\right)=-\ln\left(\sqrt{1+tg^2x}+tgx\right)=-f(x).$

Следовательно, $f(x)$ – нечётная функция

Ответ: функция $\ln\left(tg\,x+\sqrt{1+tg^2x}\right)$ является нечётной.

Задача 2 (7 баллов)

Центр круга лежит в первой координатной четверти и имеет координаты $(a;b)$. Известно, что начало координат лежит внутри круга. Обозначим S^+ общую площадь тех частей круга, в которых координаты имеют одинаковый знак, а S^- - общую площадь тех частей круга, в которых координаты имеют противоположные знаки. Найти S^+-S^-.

Решение

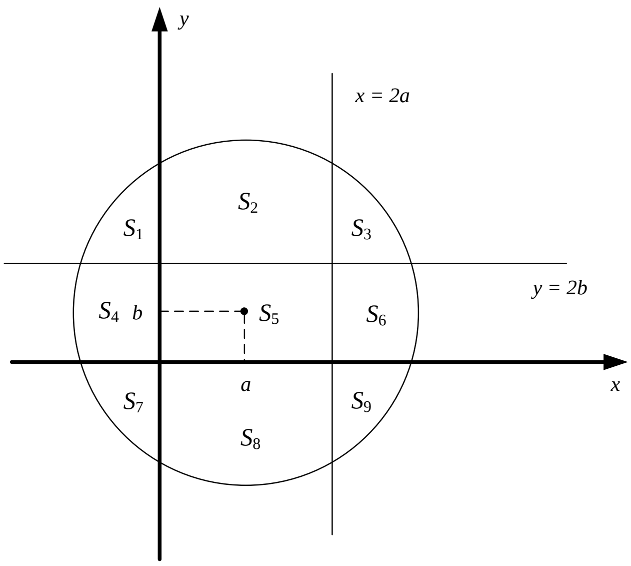


Рис. 1.

Проведем прямые:
$y=0,\ \ y=2b,\ \ x=0,\ \ x=2a.$

Прямые разобьют круг на девять областей: $S_1, S_2, \ldots, S_9$.

Тогда $S^+-S^-=$
$=S_2+S_3+S_5+S_6+S_7-S_1-S_4-S_8-S_9.$

В силу симметрии
$S_2=S_8, S_3=S_1, S_4=S_6, S_7=S_9.$

В результате
$S^+-S^-=S_5=2a\cdot 2b=4ab.$

Ответ: $S^+-S^-=4ab.$

Задача 3 (5 баллов)

При каком x функция $f(x)=\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2+27}$ принимает наименьшее значение? Найти это значение.

<u>Решение</u>

ОДЗ: $x\in R.$

Найдём производную:

$$f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+9}}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+27}}=\frac{(2x-3)\cdot\sqrt{x^2+27}+2x\cdot\sqrt{x^2-3x+9}}{2\sqrt{x^2-3x+9}\cdot\sqrt{x^2+27}}.$$

Найдем критические точки из условия $f'(x)=0$:

$$\frac{(2x-3)\cdot\sqrt{x^2+27}+2x\cdot\sqrt{x^2-3x+9}}{2\sqrt{x^2-3x+9}\cdot\sqrt{x^2+27}}=0$$

$$(2x-3)\cdot\sqrt{x^2+27}+2x\cdot\sqrt{x^2-3x+9}=0$$

$$2x\cdot\sqrt{x^2-3x+9}=(3-2x)\cdot\sqrt{x^2+27}\,,\ \left(ОДЗ:\quad 0\le x\le\frac{3}{2}\right)$$

$$4x^2\cdot(x^2-3x+9)=(9-12x+4x^2)\cdot(x^2+27)$$

$$4x^4-12x^3+36x^2=9x^2+243-12x^3-324x+4x^4+108x^2$$

$81x^2-324x+243=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x+3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=3\notin\text{ОДЗ},\ x_2=1\in\text{ОДЗ}$

$x=1$ - точка минимума (докажите самостоятельно).

Значение функции при $x=1$:

$$f(1)=\sqrt{7}+\sqrt{28}=\sqrt{7}+2\sqrt{7}=3\sqrt{7}$$

Ответ: <u>при $x=1$ функция принимает наименьшее значение, равное $f(1)=3\sqrt{7}$.</u>

Задача 4 (8 баллов)

Найти кратчайшее расстояние от окружности $x^2 + y^2 - 49 = 0$ до прямой $-3x + 4y + 40 = 0$.

Решение

Обозначим данную прямую ***l***.

$$l : y = \frac{3}{4}x - 10$$

Расстояние от прямой до окружности - это расстояние от ближайшей точки окружности до прямой (см. рис. 2).

В этой точке касательная к окружности параллельна прямой l, то есть её уравнение имеет вид

$$y = \frac{3}{4}x + C.$$

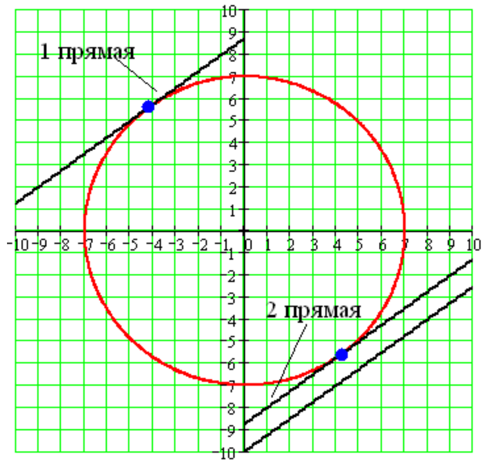


Рис. 2.

Подставим полученное выражение в уравнение окружности:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x + C\right)^2 - 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{2}Cx + C^2 - 49 = 0,\ D = \frac{9}{4}C^2 - \frac{25}{4}(C^2 - 49)$$

Так как точка единственная, то $D = -\frac{16}{4}C^2 + \frac{25 \cdot 49}{4} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad C^2 = \frac{25 \cdot 49}{16} \quad \Rightarrow \quad C = \pm\frac{5 \cdot 7}{4} = \pm\frac{35}{4}.$$

Таким образом, получается две прямые:

1. $y = \frac{3}{4}x + \frac{35}{4};\ 4y - 3x - 35 = 0$
2. $y = \frac{3}{4}x - \frac{35}{4};\ 4y - 3x + 35 = 0$

Найдем расстояния между этими прямыми и прямой l, взяв точку $A(0; -10) \in l$:

$$d_1 = \frac{|4 \cdot (-10) - 3 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{75}{5} = 15\boldsymbol{,}\ d_2 = \frac{|4 \cdot (-10) - 3 \cdot 0 + 35|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{5} = 1\boldsymbol{,}\ d_1 > d_2.$$

Ответ: кратчайшее расстояние между прямой $-3x + 4y + 40 = 0$ и окружностью $x^2 + y^2 - 49 = 0$ равно 1.

Задача 5 (4 балла)

Найти $f'(0)$, если $f(x) = (3x + 2)f(x^2) + 2$.

Решение

Заметим, что при $x = 0$ значение функции $f(0) = 2f(0) + 2 \quad \Rightarrow \quad f(0) = -2$.

Найдём производную: $f'(x) = 3f(x^2) + (3x + 2)f'(x^2) \cdot 2x$.

Тогда при $x = 0$ значение производной $f'(0) = 3f(0) + 2f'(0) \cdot 0 = 3f(0) = -6$.

Ответ: $f'(0) = -6$.

Задача 6 (4 балла)

Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2014}{\ln x}}$.

Решение

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2014}{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x\cdot\frac{2014}{\ln x}} \lim_{x\to+\infty} e^{2014} = e^{2014}.$$

Задача 7 (10 баллов)

Найти наименьшую длину отрезка, проходящего через точку $M(1;3\sqrt{3})$, концы которого лежат на положительных значениях осей Ox и Oy.

Решение

Уравнение прямой, проходящей через точку M, имеет вид $y = kx + b$.

Тогда координаты точки $A(0;b)$, точки $B\left(-\frac{b}{k};0\right)$, $k<0$, $b>0$.

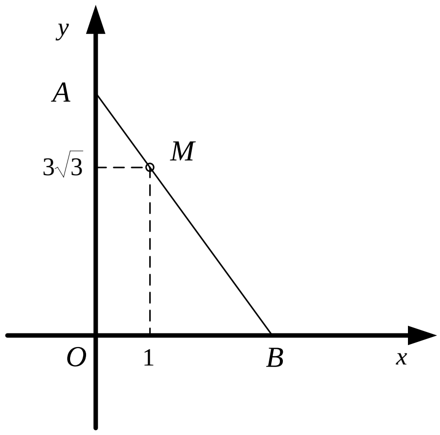


Рис. 3.

Так как отрезок проходит через точку $M(1;3\sqrt{3})$, то справедливо соотношение

$$3\sqrt{3} = k + b \quad\Rightarrow\quad b = 3\sqrt{3} - k.$$

$$|AB| = \sqrt{\frac{b^2}{k^2} + b^2} = \sqrt{b^2\cdot\left(\frac{1}{k^2}+1\right)} = \frac{|b|}{|k|}\sqrt{k^2+1}$$

Т. к. $b>0$, то $|b| = b = 3\sqrt{3}-k$; $k<0$, то $|k| = -k$.

Составим функцию:

$$|AB| = f(k) = -\frac{3\sqrt{3}-k}{k}\cdot\sqrt{k^2+1} = \left(1-\frac{3\sqrt{3}}{k}\right)\cdot\sqrt{k^2+1}.$$

Найдём производную:

$$f'(k) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{k^2}\right)\cdot\sqrt{k^2+1} + \left(1-\frac{3\sqrt{3}}{k}\right)\cdot\frac{2k}{2\sqrt{k^2+1}} = \frac{3\sqrt{3}}{k^2}\sqrt{k^2+1} + \frac{k-3\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}} =$$

$$\frac{3\sqrt{3}\cdot(k^2+1) + k^2\cdot(k-3\sqrt{3})}{k^2\sqrt{k^2+1}} = \frac{k^3+3\sqrt{3}}{k^2\sqrt{k^2+1}}$$

Найдем критические точки из условия $f'(k)=0$:

$$f'(k) = \frac{k^3+3\sqrt{3}}{k^2\sqrt{k^2+1}} = 0 \quad\Rightarrow\quad k_1 \neq 0;\ k_2 = -\sqrt{3}.$$

Исследуем критическую точку на экстремум (см. рис. 4). Наименьшее значение функция принимает при $k = -\sqrt{3}$.

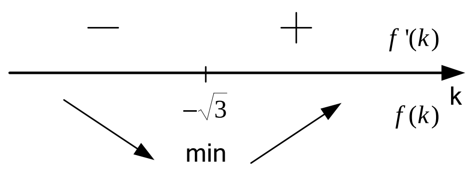


Рис. 4.

Найдём это значение:

$$|AB| = \left(1-\frac{3\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}\right)\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1} = 4\cdot 2 = 8.$$

Ответ: наименьшая длина отрезка равна 8 ед.

Задача 8 (6 баллов)

Найти вторую производную функции

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Преобразуем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} (2)=(2)-(1) \\ (3)=(3)-(1) \\ (4)=(4)+(1) \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & x+1 & x+1 & x+1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=x(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\{(4)=(4)+(3)\}=x\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-2x(x+1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2x(x+1)(2-4)=4x(x+1).$$

Таким образом, $y=4x(x+1) \quad \Rightarrow \quad y''=(4x(x+1))''=8$.

Ответ: вторая производная данной функции равна 8.

Задача 9 (5 баллов)

Построить график функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{9-x^2+4\sqrt{5-x^2}}+\sqrt{9-x^2-4\sqrt{5-x^2}}\right).$$

Решение

Преобразуем $f(x)$: $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5-x^2+4\sqrt{5-x^2}+4}+\sqrt{5-x^2-4\sqrt{5-x^2}+4}\right)$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5-x^2}-2\right)^2}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\left|\sqrt{5-x^2}+2\right|+\left|\sqrt{5-x^2}-2\right|\right)$$

Значение $\sqrt{5-x^2}+2\geq 0$ при всех значениях x таких, что $5-x^2\geq 0$, поэтому

$$\left|\sqrt{5-x^2}+2\right|=\sqrt{5-x^2}+2,\ -\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}.$$

Раскроем модуль $\left|\sqrt{5-x^2}-2\right|$:

1. $\begin{cases} \sqrt{5-x^2}-2 \ge 0, \\ 5-x^2 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x^2 \ge 4; \\ 5-x^2 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow 5-x^2 \ge 4 \Leftrightarrow 1-x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in [-1;1].$

$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5-x^2}+2+\sqrt{5-x^2}-2\right)=\sqrt{5-x^2}$ - часть окружности с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{5}$, расположенная выше оси Ох.

2. $\begin{cases} \sqrt{5-x^2}-2 < 0; \\ 5-x^2 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x^2 < 4; \\ 5-x^2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow x \in [-\sqrt{5};-1) \cup (1;\sqrt{5}].$

$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5-x^2}+2-\sqrt{5-x^2}+2\right)=2$ - прямая.

Таким образом, функция примет окончательный вид:

$f(x)=\begin{cases} \sqrt{5-x^2}, x \in [-1;1], \\ 2, x \in [-\sqrt{5};-1) \cup (1;\sqrt{5}]. \end{cases}$

Построим график функции (см. рис. 5).

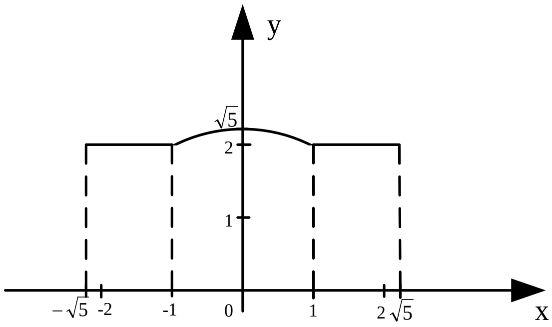
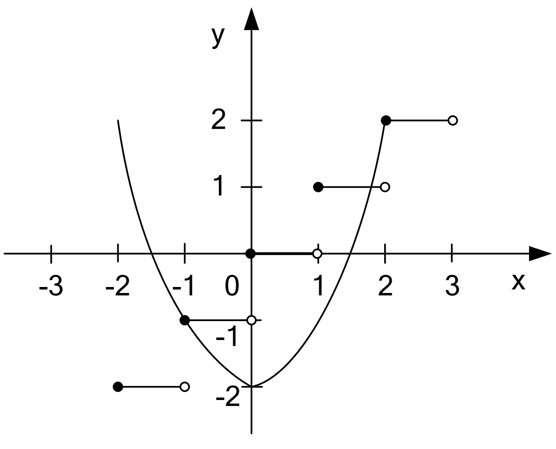


Рис5

Задача 10 (7 баллов)

Решить уравнение $x^2-[x]=2$. (Здесь символ $[x]$ – целая часть числа *x*, например: [1,5]=1, [-2,8]= - 3, [$\sqrt{26}$]=5).

<u>*Решение*</u>



Решим уравнение графически.
Запишем уравнение в виде

$$x^2-2=[x]$$

и построим график двух функций:

$y=x^2-2$ и $y=[x]$ (см. рис. 6).

Очевидно, что уравнение имеет три решения:

$$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3 \in [1,2), [x_3]=1.$$

Найдем третий корень из уравнения

$$x^2-2=1 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}$$

($x=-\sqrt{3}$ не подходит).

Ответ: <u>$x_1=-1, x_2=2, x_3=\sqrt{3}.$</u>